

---

# Journées du GDR 3475 Analyse Multifractale

---

Livret des résumés



Avignon - 18 au 22 septembre 2016



# Sommaire

<b>AYACHE Antoine</b>	
<i>Stationary increments Harmonizable stable fields : upper estimates on path behavior . . . . .</i>	3
<b>BALANÇA Paul</b>	
<i>Multifractalité d'une EDPS non-linéaire . . . . .</i>	3
<b>BERTRAND Pierre Raphaël</b>	
<i>Overfitting of Hurst estimators for multifractional Brownian motion. A fitting test advocating simple models . . . . .</i>	4
<b>BIERMÉ Hermine</b>	
<i>Operator-scaling random ball model . . . . .</i>	5
<b>BUCZOLICH Zoltán</b>	
<i>Propriétés multifractales d'enveloppes convexes et des fonctions convexes génériques . . . . .</i>	6
<b>CHESSEBOEUF Clément</b>	
<i>Variance change-point detection for stationary Gaussian processes . . . . .</i>	6
<b>CHEVILLARD Laurent</b>	
<i>Un processus multifractal unidimensionnel à densités dissymétriques : Construction, étude de la régularité et applications à la turbulence des fluides . . . . .</i>	7
<b>CIUCIU Philippe</b>	
<i>The convergence of neural activity recorded in MEG to modeled multifractal attractors in cortex predicts learning . . . . .</i>	7
<b>DUPLANTIER Bertrand</b>	
<i>Liouville Quantum Multifractality . . . . .</i>	8
<b>ESSER Céline</b>	
<i>Propriétés multifractales de la divergence de séries d'ondelettes . . . . .</i>	8
<b>HEURTEAUX Yanick</b>	
<i>Phénomènes multifractals et dimension de packing . . . . .</i>	8
<b>KLEYNTSENS Thomas</b>	
<i>Raffinement de l'estimation asymptotique de l'exposant de Hölder . . . . .</i>	8
<b>LEONARDUZZI Roberto</b>	
<i>p-leader analysis and classification of oscillating singularities . . . . .</i>	10
<b>LIAO Lingmin</b>	
<i>Dimension de Hausdorff des ensembles des vecteurs singuliers pondérés dans <math>\mathbb{R}^2</math> . . . . .</i>	10
<b>MELOT Clothilde</b>	
<i>Algorithmes pyramidaux et forêts aléatoires . . . . .</i>	10

<b>OLIVIER Éric</b>	
<i>Unicité de la mesure ergodique de dimension maximale pour des répulseurs auto-affines . . . . .</i>	11
<b>SÉMÉCURBE François, ROUX Stéphane et TANNIER Cécile</b>	
<i>La forme des villes françaises est-elle déterminée par les morphologies bâties et non bâties qui les environnent ? Éléments de réponse apportés par des analyses multifractale . . . . .</i>	11
<b>WU Meng</b>	
<i>Sur les intersections d'ensembles de Cantor . . . . .</i>	12

# Stationary increments Harmonizable stable fields : upper estimates on path behavior

Antoine Ayache

Laboratoire Painlevé, Université Lille 1

Studying sample path behavior of stochastic fields/processes is a classical research topic in probability theory and related areas such as fractal geometry. To this end, many methods have been developed since a long time in Gaussian frames. They often rely on some underlying “nice” Hilbertian structure, and can also require finiteness of moments of high order. Therefore, they can hardly be transposed to frames of heavy-tailed stable probability distributions. However, in the case of some linear non-anticipative moving average stable fields/processes, such as the linear fractional stable sheet and the linear multifractional stable motion, rather new wavelet strategies have already proved to be successful in order to obtain sharp moduli of continuity and other results on sample path behavior. The main goal of our talk is to show that, despite the difficulties inherent in the frequency domain, such kind of a wavelet methodology can be generalized and improved, so that it also becomes fruitful in a general harmonizable stable setting with stationary increments. Let us point out that there are large differences between this harmonizable setting and the moving average stable one.

Joint work with Geoffrey Boutard (Laboratoire Painlevé, Université Lille 1).

---

## Multifractalité d’une EDPS non-linéaire

Paul Balança

Queen Mary University of London

Dans cet exposé, nous intéressons à la géométrie multifractale de l’équation aux dérivées partielles stochastique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t(x) = \Delta X_t(x) + (X_{t-}(x))^{1/\gamma} \dot{L}(t, x) \quad (1)$$

où  $\dot{L}$  est un bruit  $\gamma$ -stable sans sauts négatifs. Cette équation non-linéaire apparaît naturellement lors de l’étude d’un modèle simple de particules branchantes, le mouvement super-Brownien avec branchement stable. Comme ont pu le montrer plusieurs travaux [1, 2, 3, 4], l’étude de la géométrie fractale du champs  $(t, x) \rightarrow X_t(x)$  est un problème complexe. À temps fixé  $t$ , le processus  $X_t(\cdot)$  est continu, et Mytnik et Wachtel [4] ont pu récemment obtenir le spectre multifractal en la variable d’espace. Néanmoins, Mytnik et Perkins [3] ont également montré que pour tout  $s > 0$

$$\|X(\cdot)\|_{(s, s+\delta)} = \infty \quad \text{pour tout } \delta > 0, X_s(dx)\text{-p.s. } \mathbb{P}\text{-p.s..} \quad (2)$$

Autrement dit, le champ aléatoire  $X_t(x)$  admet un ensemble de singularités explosantes dense en espace temps. Nous nous intéresserons dans cet exposé à la description duale de ces singularités explosantes et du spectre multifractale de la composante continue.

## Références

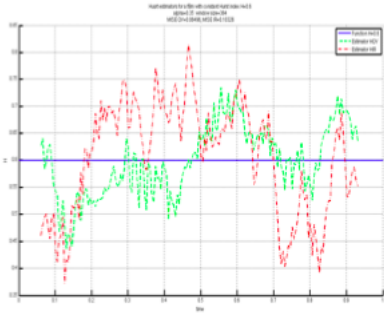
- [1] K. Fleischmann, L. Mytnik et V. Wachtel. Hölder index at a given point for density states of super- $\alpha$ -stable motion of index  $1 + \beta$ . *J. Theoret. Probab.* 24.1 (2011), p. 66—92.
- [2] K. Fleischmann, L. Mutnik et V. Wachtel. Optimal local Hölder index for density states of superprocesses with  $(1 + \beta)$ -branching mechanism. *Ann. Probab.* 38.3 (2010), p. 1180—1220.
- [3] L. Mytnik et E. Perkins. Regularity and irregularity of  $(1 + \beta)$ -stable super-Brownian motion. *Ann. Probab.* 31.3 (2003), p. 1413—1440.
- [4] L. Mytnik et V. Wachtel. Multifractal analysis of superprocesses with stable branching in dimension one. *Ann. Probab.* 43.5 (2015), p. 2763—2809.

# Overfitting of Hurst estimators for multifractional Brownian motion. A fitting test advocating simple models.

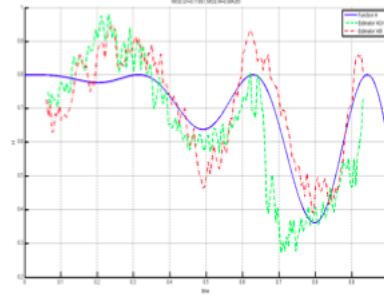
Pierre Raphaël Bertrand

Laboratoire de Mathématiques, Université Clermont Auvergne

The multifractional Brownian motion (mBm) is a generalization of the fractional Brownian motion (fBm) where the Hurst index  $H$  is replaced by a time-varying function  $H(t)$  [4, 10]. Such a time-varying Hurst index is encountered in different kinds of application such as turbulence, magnetospheric dynamics, and systems biology. In quantitative finance, theoretical explanations are developed by economist : When  $H(t) < 1/2$ , the market overreacts, namely the increments of the (log)price process are negatively correlated (antipersistence), whereas when  $H(t) > 1/2$ , the market underreacts, namely the increments are positively correlated (persistence), see e.g. [7, 9]. For time varying Hurst index  $H(t)$ , the state of the art consists in localisation of the estimator on a small vicinity  $V(t; \varepsilon)$  of each time  $t$ . We then obtain estimators  $\hat{H}^{(QV)}(t)$ , or  $\hat{H}^{(IR)}(t)$ , corresponding respectively to Quadratic Variation or Increment Ratio, see [3, 8]. However localisation induces sampling fluctuation as shown by Fig. 1(a), Fig. 1(b).



(a) Estimation of a time-varying Hurst index  $H(t)$  for a fBm with constant Hurst index  $H = 0.7$ .



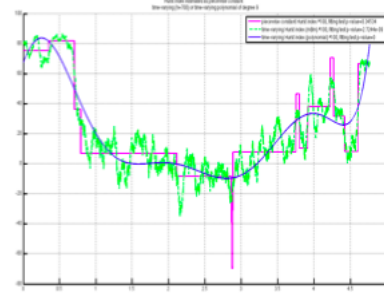
(b) Estimation of an analytic time-varying Hurst index  $H(t) = 0.1 + 0.7 \times (1 - (t \sin(10t))^2)$ .

In fact, in Fig. 1(a) the theoretical Hurst index is constant and in Fig. 1(b) the Hurst index is an analytic function of time. Stress that we use the Matlab codes written by JM Bardet (Software for estimating the Hurst function  $H$  of a Multifractional Brownian Motion : Quadratic Variation estimator and IR estimator, <http://samm.univ-paris1.fr/Sofwares-Logiciels>), and that the same behavior can be observed in [3, Fig.1 p.1022 and Fig.2 p.1023]. Sampling fluctuation gives the feeling that the Hurst index is itself a stochastic process, for example a fBm. Mathematical construction of multifractional processes with such random exponent have been investigated by [1, 2]. The next logical question is the choice of a model corresponding to a real dataset.

By using CLT proved in [3, 8], we can derive a fitting test for a time varying Hurst index. We then show that both naive time-varying estimators  $\hat{H}^{(QV)}(t)$  and  $\hat{H}^{(IR)}(t)$  would be asymptotically rejected. Next we apply our test to real datasets, see Fig. 1(c) and Fig. 1(d).



(c) Estimation of a time-varying Hurst index  $H(t)$  for daily series of oil prices.



(d) Estimation of a time-varying Hurst index  $H(t)$  for heartbeat series of a Marathon runner.

Fig. 1(c) presents results on daily series of oil prices and Fig. 1(d) the results for heartbeat series of a Marathon runner (Paris 2006). In both example, we reject the naive estimator  $\widehat{H}^{(IR)}(t)$  (green line), but also polynomial interpolation (blue line). In Fig. 1(c) we accept the constant Hurst index model (fBm), which is rejected in Fig. 1(d), while piecewise constant Hurst index model (step fBm) is accepted (magenta line). Point that we use change point detection algorithm developed in [5]. To sum up, we can select a simple model of time varying Hurst index, and most often we reject the naive multifractional estimators  $\widehat{H}^{(QV)}(t)$ ,  $\widehat{H}^{(IR)}(t)$ , which fluctuation turn to be a statistical artifact.

Joint work with Marie-Eliette Dury (École d'Économie, Université Clermont Auvergne) and Doha Hadouni (Laboratoire de Mathématiques, Université Clermont Auvergne).  
This research has been supported by grant ANR-12-BS01-0016-01 "Do Well B".

## Références

- [1] Ayache, A, Taqqu, MS (2005), Multifractional processes with random exponent. *Publ. Mat.* 49, 459–486.
- [2] Ayache, A, Jaffard, S, Taqqu, MS (2007) Wavelet construction of Generalized Multifractional processes. *Revista Matematica Iberoamericana*, 23, No 1, 327–370.
- [3] Bardet, JM, Surgailis, D (2013). Nonparametric estimation of the local Hurst function of multifractional processes. *Stochastic Processes and Applications*, 123, 1004–1045.
- [4] Benassi A, Jaffard S, Roux D (1997), Elliptic Gaussian random processes. *Revista Matematica Iberoamericana*, 13(1) :19–90.
- [5] Bertrand, PR, Hadouni, D (2016), Change point detection by Filtered Derivative with p-Value : Choice of the extra-parameters. Submitted.
- [6] Bertrand, PR, Hamdouni, A, Khadhraoui S (2012), Modelling NASDAQ series by sparse multifractional Brownian motion, *Methodology and Computing in Applied Probability*. Vol. 14, No 1 : 107–124.
- [7] Bianchi, S, Pantanella, A, Pianese, A (2015) Efficient Markets and Behavioral Finance : a comprehensive multifractal model. *Advances in Complex Systems* 18.
- [8] Coeurjolly, JF (2005), Identification of multifractional Brownian motion, *Bernoulli* 11 (6), 987–1008.
- [9] Frezza, M (2012) Modeling the time-changing dependence in stock markets. *Chaos Solitons & Fractals* 45(12) :1510–1520
- [10] Peltier, RF, Lévy-Véhel, J (1995), Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results, Research Report RR-2645, INRIA, Rocquencourt.

---

## Operator-scaling random ball model

Hermine Biermé

LMA, Université de Poitiers

We study generalized random fields which arise as operator rescaling limits of spatial configurations of uniformly scattered weighted random balls as the mean radius of the balls tends to 0 or infinity. Assuming that the radius distribution has a power law behavior, we prove that the centered and renormalized random balls field admits an  $\alpha$ -stable limit with strong spatial dependence, according to the attraction domain of the weights. In particular, our approach provides a unified framework to obtain some operator-scaling  $\alpha$ -stable random fields, generalizing the isotropic self-similar case investigated recently in the literature.

---



# Propriétés multifractales d'enveloppes convexes et des fonctions convexes génériques

Zoltán Buczolich

University Pázmány Péter Sétány, Budapest

We study the singularity (multifractal) spectrum of continuous convex functions defined on  $[0, 1]^d$ . Let  $E_f^h$  be the set of points at which  $f$  has a pointwise exponent equal to  $h$ . For generic continuous convex functions  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ , we have that  $\dim E_f^h = d - 2 + h$  for all  $h \in [1, 2]$ , and in addition, we obtain that the set  $E_f^h$  is empty if  $h \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . The boundary of  $[0, 1]^d$  belongs to  $E_f^0$  for the typical convex continuous function.

We also study the singularity (multifractal) spectrum of the convex hull of the typical/generic continuous functions defined on  $[0, 1]^d$ . We denote by  $\mathbf{E}_\varphi^h$  the set of points at which  $\varphi : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$  has a pointwise Hölder exponent equal to  $h$ . Let  $H_f$  be the convex hull of the graph of  $f$ , the concave function on the top of  $H_f$  is denoted by  $\varphi_{1,f}(x) = \max\{y : (x, y) \in H_f\}$  and  $\varphi_{2,f}(x) = \min\{y : (x, y) \in H_f\}$  denotes the convex function on the bottom of  $H_f$ . We show that there is a dense open subset  $\mathcal{G} \subset C[0, 1]^d$  such that for  $f \in \mathcal{G}$  the following properties are satisfied. For  $i = 1, 2$  the functions  $\varphi_{i,f}$  and  $f$  coincide only on a set of zero Hausdorff dimension, the functions  $\varphi_{i,f}$  are continuously differentiable on  $(0, 1)^d$ ,  $\mathbf{E}_\varphi^0$  equals the boundary of  $[0, 1]^d$ ,  $\dim_H \mathbf{E}_\varphi^1 = d - 1$ ,  $\dim_H \mathbf{E}_\varphi^{+\infty} = d$  and  $\mathbf{E}_\varphi^h = \emptyset$  if  $h \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ .

Partially joint work with Stéphane Seuret (Université Paris Est).

---

## Variance change-point detection for stationary Gaussian processes

Clément Chesseboeuf

LMA, Université de Poitiers

We consider the problem of detecting and estimating abrupt changes in the variance of a piecewise stationary Gaussian sequence. Following the usual approach of the change-point analysis we define a contrast function and estimate the change-point as the point of maximum contrast. The consistency of such an estimator can be proven using a functional convergence theorem. A natural application of this method is the detection of change in the Hurst index of a piecewise fractional Brownian motion (fBm).

Let  $H_1$  and  $H_2$  be two Hurst indexes in  $(0, 1)$ . Let  $(W_{H_1}(t))_{t \in [0, 1]}$  and  $(W_{H_2}(t))_{t \in [0, 1]}$  be two fractional Brownian motions associated with  $H_1$  and  $H_2$ . The change-point is a real  $t^* \in (0, 1)$  and  $(X(t))_{t \in [0, 1]}$  is the process defined by

$$X(t) = \begin{cases} W_{H_1}(t) & 0 \leq t \leq t^*, \\ W_{H_1}(t^*) + W_{H_2}(t - t^*) & t^* < t \leq 1. \end{cases}$$

A typical trajectory of  $X$  is presented in the figure below.

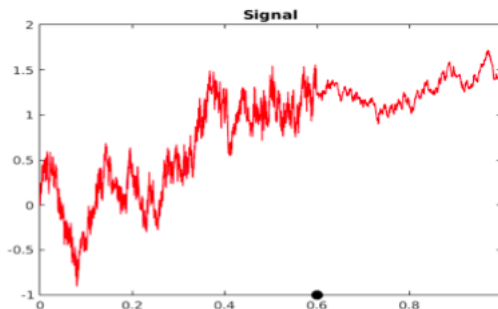


Figure 1:  $H_1 = 0.45$ ,  $H_2 = 0.6$ ,  $t^* = 0.6$ .



Then, the problem is to construct an estimator of  $t^*$  based on such a trajectory. By using the stationarity of increments, we can design our change-point estimation method in order to solve this problem.

In this talk I will present the construction of the estimator and prove its consistency. A relative statistical test will be also discussed. Finally, I will give numerical results illustrating the properties of the estimator.

Joint work with Hermine Biermé (LMA, Université de Poitiers) and Farida Enikeeva (LMA, Université de Poitiers).

---

### **Un processus multifractal unidimensionnel à densités dissymétriques :**

Construction, étude de la régularité et applications à la turbulence des fluides.

Laurent Chevillard

Laboratoire de physique, ENS Lyon

Nous proposons un processus aléatoire de variance finie et homogène, qui émane une invariance d'échelle continue et multifractale. De plus, ce qui est nouveau, les lois de probabilité sont dissymétriques et gouvernées par la multifractalité. Ce processus est construit à partir d'un mouvement Brownien fractionnaire perturbé par un champ Gaussien log-corrélé, à partir duquel la multifractalité est imposée par un chaos multiplicatif (à la Kahane). Nous calculons explicitement les exposants des fonctions de structure, en particulier ceux d'ordres impairs, qui gouvernent la statistique du processus aux échelles infiniment petites. Plus particulièrement, pour des régularités höldériennes proches de  $1/3$ , nous montrons que le modèle permet ainsi de reproduire les fluctuations de la vitesse turbulence observée dans les souffleries. Ceci nous permet, et ce pour la première fois à notre connaissance, de donner une représentation aléatoire cohérente de l'approche axiomatique de Kolmogorov.

---

### **The convergence of neural activity recorded in MEG to modeled multifractal attractors in cortex predicts learning**

Philippe Ciuciu

CEA/NeuroSpin & INRIA Saclay/Parietal

Mesoscopic brain activity shows scale-free dynamics ( $1/f$  power spectrum) whose characterization can be enriched by quantifying self-similarity (temporal autocorrelation) and multifractality (transient oscillating temporal structures). Here, the functional relevance of scale-free dynamics in learning was questioned by using magnetoencephalography (MEG) recordings obtained while participants improved on a difficult visual task [Zilber et al, NeuroImage 2014]. We report several major findings. First, a fronto-occipital decrease of self-similarity typically reported during restigstate was here strengthened during task performance. Importantly, local decreases in self-similarity correlated with individuals' performance, suggesting that the capacity of a brain region to decrease its temporal autocorrelation is indicative of perceptual improvements. Second, multifractality was found in several brain regions and neural activity converged to modeled local multifractal attractors (e.g. visual motion area MT, parietal cortices) : after training, the distance between an individual's multifractality and group-level multifractal attractors correlated with the individual's performance. Thus, the distance of multifractality to the asymptotic value provides a predictive marker of learning. Altogether, we show that self-similarity and multifractality are functionally relevant measures of scale-free brain activity and may provide useful indices of computational limitations in brain plasticity.

## Liouville Quantum Multifractality

Bertrand Duplantier

CEA Saclay

We describe recent advances in the study of the coupling of Schramm–Loewner Evolution (SLE), a canonical model of non-crossing random paths in the plane, to Liouville Quantum Gravity (LQG), a canonical model of random surfaces in 2D quantum gravity. The latter is expected to be the universal, conformally invariant, continuum limit of random planar maps, as weighted by critical statistical models. The various multifractal spectra of SLE have natural analogues on random planar maps and in LQG. An example is extreme nesting in the  $O(n)$  loop model on a random planar map, as derived recently via combinatorial methods, and extreme nesting in the so-called Conformal Loop Ensemble, as derived by Miller, Watson and Wilson. Their respective large deviations functions are shown to match, under a continuum KPZ transform inherent to LQG. Other instances are the classical, versus quantum, spectra for harmonic measure and windings in SLE.

Based in part on joint work with Gaëtan Borot and Jérémie Bouttier.

---

## Propriétés multifractales de la divergence de séries d'ondelettes

Céline Esser

Université Lille 1

Dans cet exposé, nous nous intéressons à la divergence ponctuelle de séries d'ondelettes dans un espace de Besov donné. Nous obtenons une borne supérieure pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points ayant un taux de divergence donné, et nous montrons que cette borne est optimale en utilisant les notions de résidualité et de prévalence.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Stéphanne Jaffard (Université Paris Est).

---

## Phénomènes multifractals et dimension de packing

Yanick Heurteaux

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Dans cet exposé, nous essayerons de montrer en quoi, différents phénomènes multifractals comme la régularité locale des fonctions, le comportement radial des fonctions harmoniques ou encore le comportement asymptotique des séries de Fourier, relèvent (plus ou moins) d'un même cadre général. Nous mettrons aussi en évidence de nouveaux phénomènes multifractals qui se mesurent naturellement à l'aide de la dimension de packing.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Frédéric Bayart (Université Blaise Pascal).

---

## Raffinement de l'estimation asymptotique de l'exposant de Hölder

Thomas Kleynssens

Université de Liège

Une fonction continue  $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$  appartient à l'espace de Hölder ponctuel  $\Lambda^\alpha(x_0)$  ( $\alpha > 0$  et  $x_0 \in \mathbf{R}$ ) s'il existe une constante  $C > 0$  et un polynôme  $P$  de degré strictement inférieur à  $\alpha$  tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha \tag{1}$$

dans un voisinage de  $x_0$ . Une fonction  $f$  appartient à l'espace de Hölder uniforme  $\Lambda^\alpha$  si  $f$  appartient à  $\Lambda^\alpha(x_0)$  pour tout  $x_0 \in \mathbf{R}$ , la constante  $C$  de l'inégalité (1) devenant uniforme.

Vu que les espaces  $\Lambda^\alpha(x_0)$  sont emboîtés, une notion de régularité de  $f$  en  $x_0$  est donnée par l'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$ ; il est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Il est aisé de remarquer que plus l'exposant de Hölder est grand, plus la fonction est régulière au voisinage de  $x_0$ . En particulier, si  $f$  est  $n$  fois continûment dérivable au voisinage de  $x_0$  alors  $f$  appartient à  $\Lambda^\alpha(x_0)$  pour tout  $\alpha \leq n$ .

Il est bien connu qu'une marche aléatoire brownienne est continue, nulle part dérivable et l'exposant de Hölder est égal à  $1/2$  presque sûrement. Bien entendu, il existe des processus ayant le même exposant de Hölder et qui sont différents du mouvement Brownien. La connaissance seule de l'exposant de Hölder ne permet pas de distinguer ces processus entre eux. Pourtant, dans le cas d'un mouvement Brownien  $B$ , nous savons que

$$|B(x) - B(x_0)| \leq C\sqrt{|x - x_0| |\log |\log |x - x_0|||}$$

presque sûrement.

Il est possible de généraliser les espaces de Hölder uniformes en étudiant plus finement l'inégalité (1) [6]. D'autre part, localement, pour estimer l'exposant de Hölder, des approches basées sur les ondelettes sont souvent utilisées car elles sont rapides et efficaces en pratique.

Dans cet exposé, nous proposons une nouvelle approche basée sur les ondelettes permettant d'étudier l'inégalité (1). Elle permet en particulier de valider ou d'invalider l'utilisation de certains processus pour modéliser des phénomènes issues de la vie réelle.

Notre approche est basée sur les espaces  $S^\nu$ . Ces derniers ont été étudiés d'un point de vue théorique (par ex. [4, 2]) et un algorithme efficace a été proposé pour sa mise en pratique [3, 5]. Nous proposons une généralisation de ces espaces de la manière suivante :

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} = \left\{ c : \forall \alpha \in \mathbf{R} \forall \epsilon > 0 \forall C > 0 \exists J > 0 \forall j \geq J, \#\left\{ k : |c_{jk}| \geq C\sigma_j^{(\alpha)} \right\} \leq 2^{(\nu(\alpha) + \epsilon)j} \right\}$$

où  $c = (c_{jk})_{jk}$  représente des coefficients d'ondelettes et pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\sigma^{(\alpha)}$  est une suite de nombres strictement positifs. Lorsque  $\sigma^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$ , notre définition coïncide avec les espaces  $S^\nu$  classiques.

Ce travail est en collaboration avec mon promoteur Samuel Nicolay.

## Références

- [1] A. Almeida, Wavelet bases in generalized Besov spaces, J. Math. Anal. Appl. 304, 198–211, 2005.
- [2] J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa, Prevalence of multifractal functions in  $S^\nu$  spaces, The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007.
- [3] C. Esser, T. Kleyntssens and S. Nicolay, A Multifractal Formalism for Non Concave and Non Increasing Spectra : the  $L^\nu$  Spaces Approach, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2015.12.006>.
- [4] S. Jaffard, Beyond Besov Spaces, part I : Distribution of wavelets coefficients, J. Fourier Anal. Appl. 10, 3, 221–246, 2004
- [5] T. Kleyntssens, C. Esser and S. Nicolay, A Multifractal Formalism based on the  $S^\nu$  Spaces : from Theory to Practice, Submitted for publication
- [6] D. Kreit and S. Nicolay, Some characterizations of generalized Hölder spaces, Math. Nachr., 285 :2157–2172, 2012.

## **$p$ -leader analysis and classification of oscillating singularities**

Roberto Leonarduzzi

ENS Lyon

Many examples of signals and images, which are common in practice, cannot be modeled by locally bounded functions, so that the standard multifractal analysis, based on the Hölder exponent, is not feasible. Here we present a multifractal analysis based on another quantity, the  $p$ -exponent, which can take arbitrarily large negative values, and thus be applied to a broader category of functions. We analyze the properties of this exponent, as well as its numerical performance.

Further, we use this exponent to characterize the behavior of functions near a singularity. To that end, we introduce the two variable function which is defined at every point as the  $p$ -exponent of a fractional integral of order  $t$ . New exponents are derived which give a precise description and classification of the behavior near a singularity in terms of lacunarity and oscillation.

We analyze several examples (deterministic and random) of multifractal functions and study the pertinence of these oscillation exponents. Finally, we analyze real data from different domains to assess whether they exhibit oscillating singularities or not.

Joint work with Patrice Abry, Stéphane Jaffard, Clothilde Melot, and Herwig Wendt.

---

## **Dimension de Hausdorff des ensembles des vecteurs singuliers pondérés dans $\mathbb{R}^2$**

Lingmin Liao

Université Paris Est Créteil

Soit  $w = (w_1, w_2)$  un couple de nombres réels positifs tels que  $w_1 + w_2 = 1$  et  $w_1 \geq w_2$ . Un vecteur  $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$  est dit  $w$ -singulier si pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $T_0 > 1$  tel que pour tout  $T > T_0$ , il existe des nombres entiers  $p_1, p_2, q$  satisfaisant  $0 < q < T$ ,  $|qx_1 - p_1| < \epsilon^{w_1} T^{-w_1}$ , et  $|qx_2 - p_2| < \epsilon^{w_2} T^{-w_2}$ . Nous montrons que l'ensemble de vecteurs  $w$ -singuliers a la dimension de Hausdorff  $2 - \frac{1}{1+w_1}$ , ce qui généralise un résultat précédent de Yitwah Cheung sur la dimension Hausdorff de l'ensemble des vecteurs singuliers non pondérés dans  $\mathbb{R}^2$ .

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Ronggang Shi, Omri N. Solan et Nattalie Tamam.

---

## **Algorithmes pyramidaux et forêts aléatoires**

Clothilde Melot

I2M Marseille

A partir d'un graphe pondéré donné, on cherche à construire deux familles de fonctions sur ce graphe, dont l'une permettra de calculer une "approximation" de toute fonction sur le graphe, et l'autre de calculer les détails qui permettront de la reconstruire, comme on le fait dans le cas des bases d'ondelettes. L'équation d'entremêlement de chaînes de Markov étudiée par Diaconis et Fill permet, si on sait la résoudre, de proposer des solutions au problème précédent. On en construit finalement des solutions approchées à base de forêts aléatoires.

Travail en collaboration avec L. Avena (Université de Leiden), F. Castell (I2M Marseille) et A. Gaudillère (I2M Marseille).

# Unicité de la mesure ergodique de dimension maximale pour des répulseurs auto-affines

Éric Olivier

Université d'Aix-Marseille

Soit  $F$  l'attracteur d'un système itératif (IFS)  $\mathcal{R}$  constitué d'un nombre fini de contractions affines non singulières ; avec la bonne condition de séparation (open set condition)  $\mathcal{R}$  est associé à un répulseur (transformation mesurable et expansive)  $T$  agissant sur  $F$ . L'objet du principe variationnel pour la dimension consiste à étudier l'existence et l'unicité des mesures  $T$ -ergodiques ayant une dimension (de Hausdorff) maximale sur  $F$ . Nous présentons ici quelques résultats que nous avons étudiés avec D.-J. Feng (CUHK) dans des cas classiques d'IFS reliés à certaines convolutions de Bernoulli measures et pour lesquels le principe variationnel pour la dimension n'est pas entièrement compris.

Travail en collaboration avec D.-J. Feng (CUHK).

---

## La forme des villes françaises est-elle déterminée par les morphologies bâties et non bâties qui les environnent ?

### Éléments de réponse apportés par des analyses multifractales

François Sémécurbe, Laboratoire THÉMA, Université Bourgogne Franche-Comté

Stéphane Roux, Laboratoire de physique, ENS Lyon

Cécile Tannier, Laboratoire Chrono-Environnement, Université Bourgogne Franche-Comté

Des chercheurs en géographie ont montré, depuis les années 90, que les villes contemporaines partagent les caractéristiques morphologiques de certains objets fractals : les bordures urbaines sont très indentées à travers les échelles ; dans chaque ville, le nombre d'agrégats bâti et leur taille suivent une loi de puissance tandis que le nombre d'espaces non bâtis est relié à leur taille selon une autre loi de puissance (Batty & Longley, 1994 ; Frankhauser, 1994). Les dimensions fractales permettent de caractériser au moyen de mesures quantitatives les formes urbaines et ainsi de comparer aussi bien des villes entre elles que des quartiers d'une ville.

Nous proposons ici d'explorer, à l'aide d'analyses multifractales, à quel point l'évolution des formes urbaines au cours du temps est déterminée par les formes bâties et non bâties qui les entourent. En effet, la croissance urbaine procède par intégration progressive d'espaces périphériques à la ville. Pour autant, ceci n'implique pas nécessairement la disparition des caractéristiques morphologiques des espaces qui ont été intégrés. Sur cette base, l'hypothèse que nous cherchons à vérifier est que les formes actuelles d'occupation du sol autour de chaque ville permettent d'expliquer la différenciation morphologique des villes entre elles. L'objectif est de mieux comprendre les relations entre les villes et leur environnement. Pour ce faire, nous proposons de mettre en oeuvre des techniques de traitement du signal pour analyser les caractéristiques multifractales du bâti mais aussi de l'ensemble des objets occupant l'espace. Nous utilisons différentes techniques développées pour décrire l'aspect géométrique des d'objets fractals mais aussi les fluctuations présentent au sein de ces objets (Arneodo et al. 2000, Pustelnik et al., 2014, Wendt et al., 2009).

D'une part, nous proposons de travailler sur des images binaires de bâti. Ces images sont extraites de la BD TOPO de l'IGN, qui fournit sous une forme vectorielle l'emplacement et la forme en 2D de l'ensemble des bâtiments du territoire de France métropolitaine avec une précision métrique. Afin d'identifier différents types de textures bâties à une résolution spatiale fine, nous appliquons une méthode d'analyse que nous avons conçue spécifiquement à cet effet, la Geographically Weighted Fractal Analysis.

D'autre part, nous proposons de procéder à une analyse multifractale d'orthophotographies et de faire une segmentation des paysages en fonction de leurs caractéristiques multifractales. Pour cela, nous utilisons la méthode des coefficients Leaders peu coûteuse en temps machine et dont les performances sont bien connues de

manière théorique et pratique (Wendt et al., 2009). Les données utilisées sont des ortho-images couleurs recouvrant toute la France, d'une résolution allant de 0.5m à 5m. Ces images sont issues de la source BD ORTHO de l'IGN. Pour chaque département, l'IGN propose des orthophotographies actualisées selon un cycle quinquennal avant 2014 et triennal ensuite. Ainsi la France est entièrement couverte par des ortho-images dont les années de prise de vue changent d'un département à l'autre avec un maximum de 5 ans entre deux départements.

Dans un troisième temps, ces différentes typologies de textures bâties et d'occupation du sol sont comparées entre elles et comparées aux délimitations morphologiques des agglomérations urbaines identifiées au moyen de la méthodologie fractale proposée par Tannier et al. (2011). Avec cette méthode, qui considère le bâti à résolution spatiale fine, la frontière urbain-rural est choisie pour maximiser la différence morphologique entre l'intérieur et l'extérieur de la ville, sans fixer a priori de seuil de distance inter-bâtiments qui distinguerait une configuration du bâti urbaine d'une configuration rurale.

Ce travail est réalisé dans le cadre du projet Lecture multifractale de la forme des villes en relation avec la forme des espaces qui les entourent, dirigé par Stéphane Roux et financé par l'Institut des systèmes complexes rhône-alpin IXXI (2015-2016).

## Références

- [1] Arneodo A., Decoster N., Roux S.G. (2000) : "A wavelet-based method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces", *European Physical Journal B* 15, pp. 567–600.
- [2] Batty, M., Longley, P. (1994) : "Fractal Cities, a geometry of form and function", Academic Press.
- [3] Frankhauser P. (1994) : "La fractalité des structures urbaines", Paris, Anthropos.
- [4] Pustelnik N., Abry P., Wendt H., Dobigeon H. (2014) : "Inverse problem formulation for regularity estimation in images", *IEEE Int. Conf. Image Proces. (ICIP)*, Paris, France.
- [5] Tannier C., Thomas I., Vuidel G., Frankhauser P. (2011) : "A fractal approach to identifying urban boundaries", *Geographical Analysis* 43 (2), pp. 211–227.
- [6] Wendt H., Roux S.G., Abry P., Jaffard S. (2009) : "Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images", *Signal Processing* 89 (6), pp. 1100–1114.

---

## Sur les intersections d'ensembles de Cantor

Meng Wu

University of Oulu, Finland

Deux ensembles compacts  $E, F \subset \mathbb{R}$  sont dits fortement transverse si

$$\dim_H(E \cap (uF + v)) \leq \max\{0, \dim_H E + \dim_H F - 1\}$$

pour tout  $u \neq 0$  et  $v \in \mathbb{R}$ . A la fin des années 60, Furstenberg a conjecturé que si  $E \subset [0, 1]$  est fermé et invariant par  $x \mapsto 2x \pmod{1}$  et  $F \subset [0, 1]$  est fermé et invariant par  $x \mapsto 3x \pmod{1}$ , alors  $E$  et  $F$  sont fortement transverse.

Dans cet exposé, nous présenterons des progrès récents sur cette conjecture.

---